الموضوع:

معيار كوشي للتقارب المنتظم:

تتقارب $\{f_n\}$ المتتالية التابعية بانتظام على E في R إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \varepsilon>0 ; \exists N(\varepsilon)\in \mathbb{N} \quad ; \quad m>n>N(\varepsilon)$$

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in E$$

يمكن كتابة الشرط بالشكل:

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

مثال: برهن أن المتتالية التابعية $\{x^n\}$ متقاربة بانتظام على المجال $[-r,r]$ حيث $0<r<1$؟

الحل: نلاحظ أن المتتالية $\{x^n\}$ تتقارب نقطياً من التابع $f(x)=0$ على $[-r,r]$ لندرس التقارب المنتظم على $[-r,r]$

من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon>0$ لنوجد $N(\varepsilon)\in N$ بحيث يتحقق:

$$\forall m>n>N(\varepsilon)\Rightarrow \sup_{x\in E}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

r^n تسعى نحو 0
$r^n<\varepsilon$

$$\sup_{x\in[-r,r]}|x^n-x^m|\le \sup_{x\in[-r,r]}\left[|x|^n+|x|^m\right]=r^n+r^m\le r^n+r^n=2r^n$$

بما أن:

$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ وبالتالي يوجد $N(\varepsilon)\in N$ بحيث

$$\Rightarrow \sup_{x\in[-r,r]}|x^n-x^m|<\varepsilon \qquad r^n<\frac{\varepsilon}{2} \;;\; \forall n\in N(\varepsilon)$$

التقارب بانتظام والاستمرار:

مبرهنة: لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع المعرفة على $E\subseteq R$ والمتقاربة بانتظام على E من التابع

- إذا كانت جميع التوابع f_n مستمرة على E فإن التابع f يكون مستمراً على E.

ملاحظة:

- إذا كانت جميع التوابع f_n مستمرة على E وكان تابع النهاية f ليس مستمراً على E فإن f_n لا تتقارب بانتظام من f على E.

مثال: ادرس التقارب النقطي والمنتظم لمتتالية التوابع

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & ; \quad 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & ; \quad \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

على المجال $[0,1]$

الحل: من أجل $x=0$ نحصل على $f_n(0)=1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

من أجل $x=1$ نحصل على $f_n(1)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

من أجل أي $x \in]0,1[$ نحصل على:

$$f_n(x)=0$$

$$; \quad \frac{1}{n} < x \Leftrightarrow n > \frac{1}{x}$$

توضيح: $f_{100}(\frac{1}{2})=0 \; ; \; f_{1001}(\frac{1}{2})=0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

$$\lim_{n} f_n(\tfrac{1}{2})=0$$

وبالتالي المتتالية متقاربة نقطياً على المجال $[0,1]$ من التابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x=0 \\ 0 & , \quad 0< x \le 1 \end{cases}$$

لدينا جميع التوابع f_n مستمرة على $[0,1]$ لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n(x)=0 \\ f_n(\frac{1}{n})=0 \end{cases}$$

الموضوع :

لكن التابع f غير مستمر على $[0,1]$ لأن :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq f(0)=1$$

المتتالية التابعية f_n ليست متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$.

التقارب بانتظام والمكاملة بحسب ريمان :

مبرهنة : لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع المستمرة (أو قابلة للمكاملة) على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$.

لنفرض أن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام من التابع f على $[a,b]$ ويكون :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال : أثبت أن المتتالية التابعية $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$.

② احسب $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,dx$

الحل : المتتالية التابعية تتقارب نقطياً من التابع $f(x)=e^{-x}$ على المجال $[0,1]$.

لندرس التقارب المنتظم على $[0,1]$ لدينا $\varepsilon > 0$ حقيقي $\forall$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n\cdot e^{-x}+x^2}{n+x} - e^{-x}\right| = \left|\frac{ne^{-x}+x^2-ne^{-x}-xe^{-x}}{n+x}\right|$$

$$= \left|\frac{x^2 - x\cdot e^{-x}}{n+x}\right|$$

$$\frac{|x^2 - xe^{-x}|}{n+x} \leq \frac{x^2+x\cdot e^{-x}}{n+x} \leq \frac{1+1}{n+x} \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$$

(بحذف x يصبح المقام n)

لنأخذ $N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ أضفنا 1 لأننا نحتاج عدد طبيعي أكبر من $\frac{2}{\varepsilon}$.

الموضوع :

وبحسب تعريف التقارب بانتظام نحصل على المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

2 لدينا جميع التوابع f_n مستمرة على المجال $[0,1]$ والتقارب منتظم على هذا المجال :
بحسب مبرهنة التقارب بانتظام والمكاملة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n.e^{-x}+x^2}{n+x}\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = [e^{-x}]_0^1 = 1-e^{-1}$$

مبرهنة التقارب المحدود.

لتكن $\{f(n)\}$ متتالية من التوابع القابلة للمكاملة على $[a,b]$ ولنفرض أن :
$\{f(n)\}$ تتقارب نقطياً من التابع f على $[a,b]$ حيث f قابلة للمكاملة على $[a,b]$.
ولنفرض أنه يوجد عدد $M>0$ بحيث يكون :

$$|f_n(x)| \le M \quad ; \forall x \in [a,b] \; ; \forall n \in N$$

عندئذ يكون

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: أثبت $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n+1}{x^n+3}\,dx = \frac{1}{3}$ ؟

الحل: لنأخذ متتالية التوابع

$$f_n(x) = \frac{x^n+1}{x^n+3} \quad , \quad n \in IN$$

على المجال $[0,1]$

لندرس التقارب النقطي

من أجل $x=0$ نجد $f_1(0) = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{3}$

من أجل $x=1$ نجد $f_n(1) = \frac{1+1}{1+3} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$

من أجل $0<x<1$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{3}$

الموضوع :

وبالتالي :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3} & ; \; 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \end{cases}$$

. التقارب ليس منتظم على المجال $[0,1]$ لأن f غير مستمر على $[0,1]$

. التوابع f_n مستمرة على $[0,1]$ فهي قابلة للمكاملة

. التابع f قابل للمكاملة على المجال.

$$0\le f_n(x)=\frac{x^n+1}{x^n+3}\le 1 \quad ; \forall x\in[0,1] \; ; \forall n\in\mathbb{N}$$

✓ البسط أصغر من المقام ومقادير موجبة ≤ 1

. بحسب مبرهنة التقارب المحدود

$$\lim_{n\to\infty}\int\frac{x^n+1}{x^n+3}\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{3}\,dx=\frac{1}{3}$$

. التقارب بالانتظام والاشتقاق :

مبرهنة: لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ ولنفرض أن $\{f_n'\}$ تتقارب بانتظام على المجال $[a,b]$ ولنفرض أن $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً (على الأقل عند نقطة $(x_0\in[a,b]$ ، التقارب النقطي لـ $\{f_n\}$

عندئذٍ تكون $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ من تابع f قابل للاشتقاق على هذا المجال

$$f'(x)=\lim_{x\to\infty}f_n'(x). \quad ; x\in(a,b)$$

مثال: لتكن متتالية التوابع $f_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ المعرف على المجال $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

- لدينا جميع التوابع $f_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ قابلة للاشتقاق على المجال $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

- متتالية المشتقات $f_n'(x)=x^n$ متقاربة بانتظام على $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ تمرين سابق

- متتالية التوابع $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً من التابع $f(x)=0$ على $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ وبالتالي المتتالية التابعية

Scanned by CamScanner

/ /

الموضوع: ....

$f_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ تتقارب بانتظام من التابع $f(x)=0$ على المجال $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ والقابل للاشتقاق

على هذا المجال ويكون:

$$0 = \lim_{n\to\infty} x^n \; ; \; \forall\, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

سابقاً

مثال: $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ طريقة ثانية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

متقاربة حسب لايبنتز — متباعدة توافقية — متقاربة حسب ريمان

$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ متباعد $\Leftarrow$

الجداء متباعد

مبرهنة دينه للتقارب المنتظم:

لتكن $\{f_n\}$ متتالية متزايدة أو متناقصة من التوابع المستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ يعني

$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots\ldots$

أو $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots\ldots$

إذا كانت $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً من التابع المستمر f على المجال $[a,b]$

عندئذ $\{f_n\}$ لها " بانتظام على المجال $[a,b]$ من التابع f.

مثال: ادرس التقارب النقطي والمنتظم لمتتالية التوابع:

$\{arc\,tg(nx)\}$

على المجال $[1,2]$

الموضوع :

الحل : المتتالية تتقارب نقطياً من التابع $f(x) = \frac{\pi}{2}$ على المجال $[1,2]$ و المستمر على هذا المجال
جميع التوابع $f_n(x) = arctg(nx)$ مستمرة على المجال $[1,2]$ من أجل جميع $n \in \mathbb{N}$.

توضيح : $arctg(nx) \leq arctg((n+1)x)$ من أجل $x \in [1,2]$.
ومهما تكن $n \in N$.
يعني أن متتالية التوابع متزايدة وبالتالي متتالية التوابع تتقارب بانتظام على المجال $[1,2]$.

مبرهنة التقريب لفايرشتراس :
ليكن f تابع مستمر على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ عندئذٍ توجد متتالية من كثيرات الحدود تتقارب بانتظام على المجال نحو التابع f.

السلاسل التابعية :
لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المعرفة على E نعرف السلسلة $\sum_{k=1}^{+\infty} f_n(x)$ ونقصد بها المتتالية $\{S_n(x)\}$ (متتالية المجاميع الجزئية) التالية :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

نقول عن السلسلة التابعية $\sum f_n(x)$ أنها متقاربة نقطياً على E إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ تتقارب نقطياً على E وفي هذه الحالة نسمي نهاية $\{S_n(x)\}$ عندما $n \to \infty$ بتابع المجموع للسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

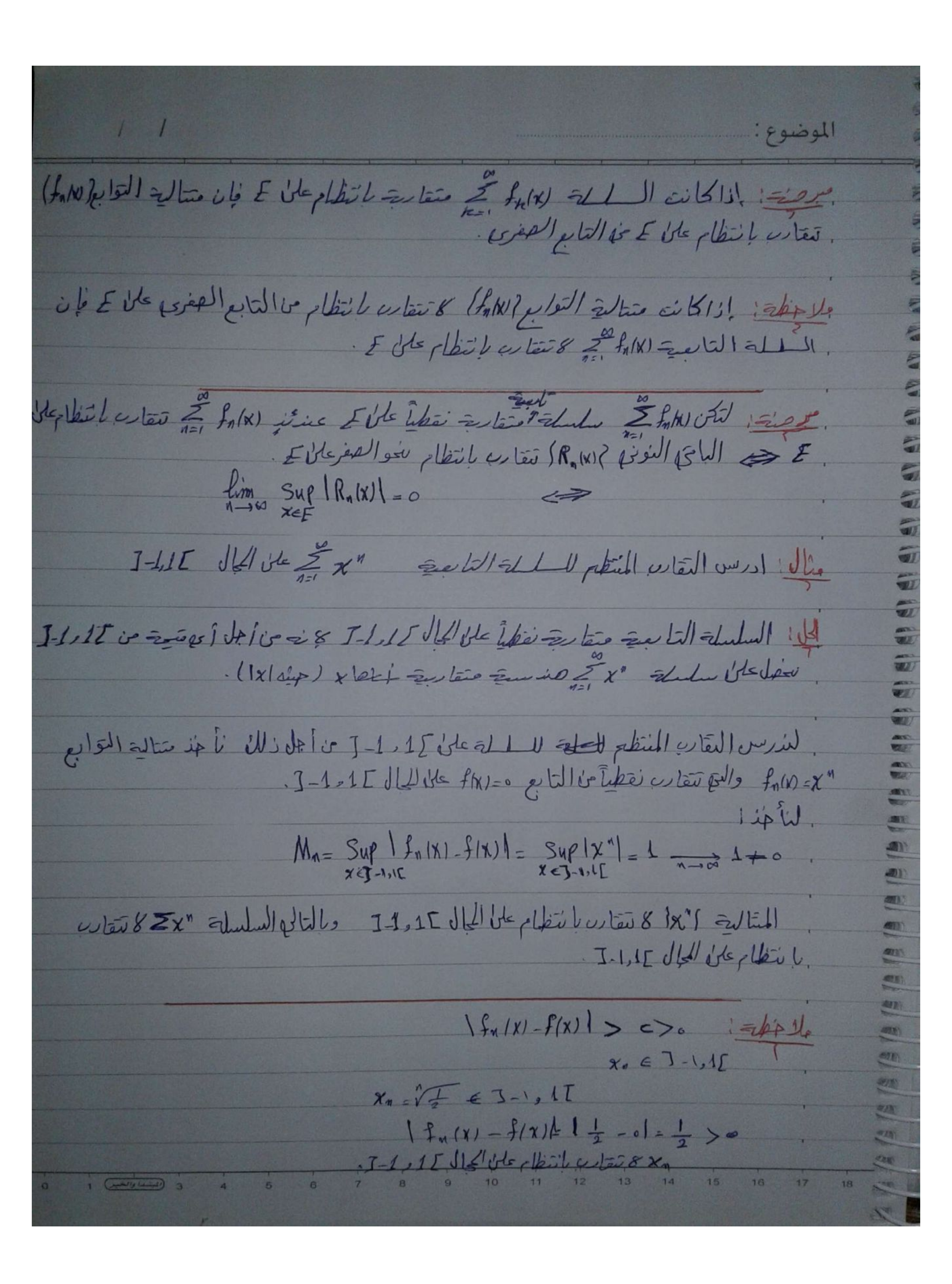
* نعرف الباقي النوني $R_n(x)$ للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ متقاربة نقطياً على E بالشكل :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

$$= S(x) - S_n(x)$$

تابع المجموع للسلسلة ↙ المجموع الجزئي النوني ↙

نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ إنها متقاربة بانتظام على E إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على E.



الموضوع : .... / /

مبرهنة: إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على E فإن متتالية التوابع $(f_n(x))$ تتقارب بانتظام على E نحو التابع الصفري.

ملاحظة: إذا كانت متتالية التوابع $(f_n(x))$ لا تتقارب بانتظام من التابع الصفري على E فإن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ لا تتقارب بانتظام على E.

مبرهنة: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعية متقاربة نقطياً على E عندئذٍ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تتقارب بانتظام على E $\iff$ الباقي النوني $(R_n(x))$ تتقارب بانتظام نحو الصفر على E.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|R_n(x)|=0 \iff$$

مثال: ادرس التقارب المنتظم للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ على المجال $]-1,1[$

الحل: السلسلة التابعية متقاربة نقطياً على المجال $]-1,1[$ لأنه من أجل أي قيمة من $]-1,1[$ نحصل على سلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ هندسية متقاربة أساسها x (حيث $|x|<1$).

لندرس التقارب المنتظم للسلسلة على $]-1,1[$ من أجل ذلك نأخذ متتالية التوابع $f_n(x)=x^n$ والتي تتقارب نقطياً من التابع $f(x)=0$ على المجال $]-1,1[$.

لنأخذ:

$$M_n=\sup_{x\in]-1,1[}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in]-1,1[}|x^n|=1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\neq 0$$

المتتالية (x^n) لا تتقارب بانتظام على المجال $]-1,1[$ وبالتالي السلسلة $\sum x^n$ لا تتقارب بانتظام على المجال $]-1,1[$.

ملاحظة: $|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon>0$

$x_0\in]-1,1[$

$x_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\in]-1,1[$

$|f_n(x)-f(x)|=|\frac{1}{2}-0|=\frac{1}{2}>0$

x^n لا تتقارب بانتظام على المجال $]-1,1[$.